電気・磁気モーメントについて

1　全電荷

$$Q = \int \rho(\vec{x}, t)\ dV \tag{1}$$

2　電気双極子モーメント

$$\vec{P} = \int \vec{x} \cdot \rho(\vec{x}, t)\ dV \tag{2}$$

3　磁気双極子モーメント

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int \vec{x} \times \rho(\vec{x}, t)\ dV \tag{3}$$

4　電気４重極子モーメント

$$I_{ij} = \int (x_i x_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} x^2)\ \rho(\vec{x}, t)\ dV \tag{4}$$

つまり $\mathbf{I}$ はテンソル量である。観測点から原点を見込む方向を単位ベクトル $\hat{n}$ であらわせば、

$$I = \int ((\hat{n} \cdot \vec{x})(\hat{n} \cdot \vec{x}) - \frac{1}{3} x^2)\ \rho(\vec{x}, t)\ dV \tag{5}$$

であり、すなわち、

$$I = \sum_{i,j=1}^{3} I_{ij} n_i n_j \tag{6}$$

となる。

5　おまけ

根本的な疑問:
電磁波では双極子放射が最低次、重力波では４重極放射が最低次である。何故か？

原理的な答:
一般相対論的な解答はべつにして、ニュートン力学的に考えてみる。電荷 (electric charge) を質量 (mass charge) におきかえてみる。クーロンの法則と万有引力の法則が対応づけられるように、質量密度分布のモーメントは以下のようになる。

1. 全質量
$$M = \int \rho(\vec{x}, t)\ dV \tag{7}$$
電荷同様、質量保存が成り立つ。クーロンの法則と万有引力は同じ形式。

2. 質量双極子
$$\vec{P} = \int \vec{x} \cdot \rho(\vec{x}, t)\ dV \tag{8}$$
時間変化を考えると、
$$\begin{aligned} \frac{d\vec{P}}{dt} &= \frac{d}{dt}\int \vec{x} \cdot \rho(\vec{r}, t)\ dV \\ &= \int [\rho\ \dot{\vec{x}} + \dot{\rho}\ \vec{x}]\ dV \end{aligned} \tag{9}$$
第１項は運動量密度である。第２項は (ρ 一定とすると考えやすいが) 全体積で積分すると消える。

したがって、運動量保存則により、適当な系をとれば $\ddot{\vec{d}} = 0$ となり、質量双極子の時間変化の項は消えてしまう。

3. 運動量の双極子次のオーダーの項は、
$$\vec{\mu} = \int \rho\ \vec{x} \times \vec{x}\ dV \tag{10}$$
これも時間変化を考えると、
$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\mu}}{dt} &= \frac{d}{dt}\int \rho\ \vec{x} \times \vec{x}\ dV \\ &= \int \rho\ \vec{v} \times \vec{x}\ dV + \int \rho\ \vec{x} \times \vec{v}\ dV \end{aligned} \tag{11}$$

最新版は以下の URL に逐次アップロード予定：
http://www.gw.hep.osaka-cu.ac.jp/4students/