２乗和変数の分布についての覚書

x_1, x_2 それぞれの確率密度関数が

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \tag{1}$$

で与えられる。このとき２乗和：

$$x = \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{\sqrt{2}} \tag{2}$$

の分布について：

確率密度関数

$$f(x) = \frac{2}{\sigma^2}\ x\ e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} \tag{3}$$

累積分布関数 (cumulative distribution function)

$$F(x) = \int_0^x f(u)du\ \ =\ \ 1 - e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} \tag{4}$$

$n\sigma$ 以上の割合

（メモなので、桁は多めに記しておく）

x	$F(x)$	$1 - F(x)$
1σ	0.632121	0.367879
2σ	0.981684	0.183156
3σ	0.999877	0.00012341
4σ		1.12535×10^{-7}
5σ		1.38879×10^{-11}
6σ		2.22045×10^{-16}
2.5σ		1.93045×10^{-3}

１次元のガウシアンと対応

式１の１次元ガウシアンと $1 - F(x)$ を比較。（この表の x の精度は３桁程度）

	１次元ガウスでの超える確率	対応する２乗和分布の x
1σ	0.3173	1.071σ
2σ	0.0455	1.757σ
3σ	0.0027	2.432σ
4σ	6.3×10^{-5}	3.110σ
5σ	5.7×10^{-7}	3.792σ
6σ	2.0×10^{-9}	4.475σ