

# データ解析

大阪市立大学 神田展行

November 6, 2003

## 1 はじめに

レーザー干渉計型重力波検出器のデータ解析の目的は、干渉計の信号中に含まれるであろう重力波イベントを探索することである。そのためには、重力波の波形やスペクトルといった性質を利用してイベントの同定を行う手法が不可欠である。また、イベントの確からしさをや観測上限を議論するといった統計的ないし系統的な解析の評価のためには、データの較正や雑音などのデータの質を評価する内容も必要である。

### 1.1 全体の流れ

図1に、検出器以降のデータの流れと代表的な処理のつながりを図示する。この図には、データ取得部におけるオンラインでの処理も含まれている。基本的には、検出器の生のデータ”raw data”が大本であり、最も重要であることはいうまでもない。raw dataは検出器の電圧信号をADCで変換したものであり、これを重力波相当への換算をおこなうのが較正”calibration”処理である。”pre-process”処理では、raw dataをcalibrationし、スペクトル $h(f)$ の計算を行い、普段の解析で使わないチャンネルをのぞいたり、後の処理の都合の良ようにデータ形式<sup>1</sup>を整えたりする。こうして、いくつかのイベント探索について共通の処理をおこなって解析しやすい形式にしたものが”processed data”である。この”processed data”を用いてイベント探索が行われる。ある種のイベント探索では他と処理がことなり”raw data”から独自に処理するものがあるし、検出器の状態評価等は”raw data”を用いることがある。

### 1.2 干渉計からの信号

重力波源から検出器に入射した重力波を、2つの偏極成分を $h_+$ と $h_\times$ とする。干渉計に重力波が入射した場合、まず重力波の入射方向によってそれぞれの

---

<sup>1</sup>TAMAではVIRGO,LIGOと統一したframe形式で記録・処理してある。

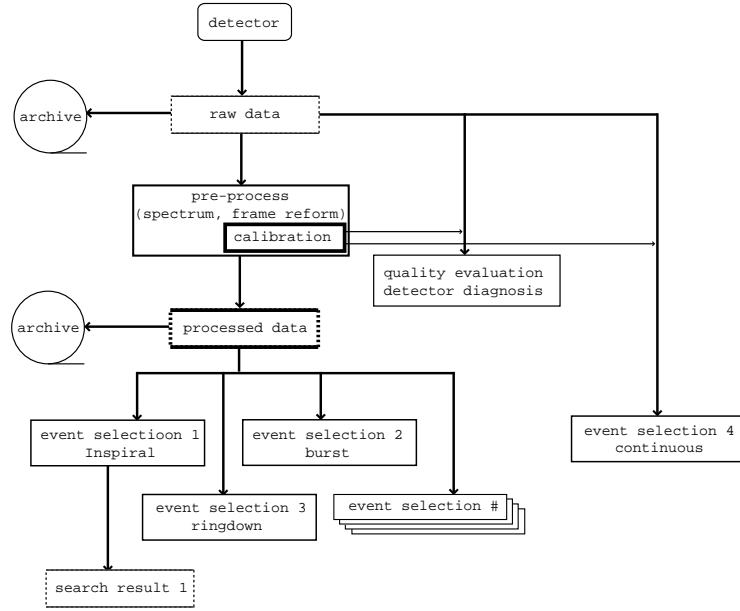


Figure 1: 解析におけるデータの流れと代表的な処理

偏極成分に対する感度パターン  $F_+$ ,  $F_\times$  がことなるので、観測される重力波  $h_{obs}(t)$  は

$$h_{obs}(t) = F_+ h_+ + F_\times h_\times \quad (1)$$

となる [1]。実際の検出器の出力  $s(t)$  は雑音  $n(t)$  と重力波の重ねあわせ

$$s(t) = h_{obs}(t) + n(t) \quad (2)$$

である。

### 1.3 イベントの大きさ Event Significance

重力波信号  $h$  がどのようなものかは、重力波源によってきまる。連星合体の重力波などは時系列  $h(t)$  として予想可能であり、また別な波源についてはスペクトル  $h(f)$  での予想しかない場合もある。そこで、重力波信号の大きさを、イベントの有為さに延長できるように信号雑音比 (SNR) で定義する。単純には、

$$\text{SNR} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{h(t) \cdot h(t)}{n(t) \cdot n(t)} dt \quad (3)$$

または周波数領域で、

$$\text{SNR} = \int_{f_{min}}^{f_{Max}} \frac{\tilde{h}(f)^* \cdot \tilde{h}(f)}{\tilde{n}(f)^* \cdot \tilde{n}(f)} df \quad (4)$$

となる。ここで、 $[t_1, t_2]$  と  $[f_{min}, f_{Max}]$  はイベントを探索するために処理するデータの時間間隔および周波数帯域である。もちろん、これらは重力波波形と雑音スペクトルによって最適な範囲がことなる。

この定義では SNR は 1 以下になりうるが、実際には信号  $h$  は常に雑音  $n$  とともにしかあらわれないので、現実的な指標としては、

$$N^2 \equiv \sqrt{\langle (n \cdot h(t))^2 \rangle} \quad (5)$$

$$S^2 \equiv |s \cdot h(t)| \quad (6)$$

とし、

$$\text{SNR} \equiv \sqrt{\frac{S^2}{N^2}} \quad (7)$$

と定義する [2]。すなわち、SNR は雑音の大きさを平均 1 としたときの重力波信号の大きさである。重力波信号がなく、完全なガウス性雑音の場合は、期待値  $\langle \text{SNR} \rangle = 1$  であり、 $N$  の標準偏差は 1 になる。ガウス性雑音の場合は、SNR は直接に信号の有為さをガウス分布における ' $n\sigma$ ' として与えることになるので、これは信号の大きさの指標として考えやすい<sup>2</sup>。

一方で、実際の検出器の雑音は非ガウス成分があり、 $1\sigma$  から大きくはなれた雑音の割合はガウス分布では正しくないので、SNR を直接にイベントの統計的有為さ (statistical confidence) とするのは避けなければならない。

## 2 ソースとイベント選別手法

### 2.1 連星合体イベント

中性子星、ブラックホール - 中性子星、ブラックホールなどの連星は、重力波を放出して、徐々に軌道半径を小さくしてゆき、最後には合体すると考えられている [3]。放出される重力波は合体の瞬間が最も大きく、これを捉えるのが TAMA のような地上のレーザー干渉計重力波検出器のもっとも重要な目的である。合体にいたるまでに、1) ポストニュートン近似によって波形の理論予想がなされている [4] インスパイラルフェーズ (inspiral phase)、2) 2 つの

<sup>2</sup>式 5 では雑音  $n$  が明示的に与えられているが、実際の計算では重力波信号を含まない(であろう)信号  $s$  をもってする。また積分範囲などは式 3,4 に準ずる。

星が接触し星の有限な大きさや内部構造などの複雑な要素が波形を決める合体フェーズ (merger phase)、3) 合体の結果が落ち着きブラックホールの固有振動による重力波が輻射される準定常状態フェーズ (QNM:quasi-normal mode phase)、に大別される。

### 2.1.1 インスパイラルフェーズ

波形が時系列、スペクトルともに精度の高い予想がなされているので、この重力波をもちいて連星合体を探索するのがもっとも期待できる。インスパイラルフェーズには、連星軌道が小さくなるにつれて周期が短くなり、このため重力波も周期が短く、振幅は増大していき、「チャープ」と呼ばれる図2の波形が予想されている。この波形の振幅と周波数発展は連星の質量で決まる。この連星からの重力波を2つの星の質量  $m_1, m_2$  と到着時刻  $t_0$  の関数として

$$h_+(t; m_1, m_2, t_0), \quad h_\times(t; m_1, m_2, t_0) \quad (8)$$

と記せる。

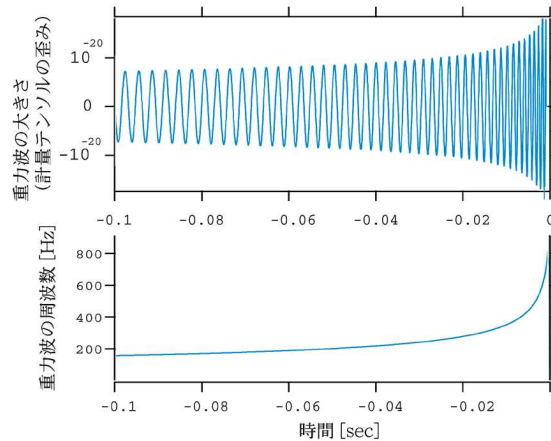


Figure 2: インスパイラルフェーズの連星合体の重力波波形

雑音スペクトル  $S_h$  がわかれば、得られるはずの SNR は連星の質量と距離によって計算できる。インスパイラルフェーズであれば、スペクトルは  $f^{-7/6}$  に比例し、SNR は、

$$\text{SNR} = \sqrt{2} A \left[ 4 \int \frac{f^{-7/3}}{S_n(f)} df \right]^{\frac{1}{2}} \quad (9)$$

ここで、

$$A = T_{\odot} \frac{c}{d} \left( \frac{5\mu}{96M_{\odot}} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{M}{\pi^2 M_{\odot}} \right)^{\frac{1}{3}} T_{\odot}^{-\frac{1}{6}}, \quad (10)$$

とできる。

LCGTのデザイン雑音スペクトル(図3。計算:宗宮氏)から求めた、SNR = 10で観測できる範囲を質量の関数として図4に示す。この図はLCGTのイベント探索可能範囲を端的に示しており、図3のスペクトルが目標である「連星中性子合体を200Mpcまで」を満たす<sup>3</sup>ことがわかる。

### 2.1.2 準定常状態フェーズ (QNM:quasi-normal mode phase)

連星合体後にブラックホールが形成された場合、正弦波が減衰する波形(リングダウン波形)の重力波をだすことが、ブラックホール時空の線形摂動により予想されている。この準定常モードを、quasi-normal mode とよぶ(以下QNM)。リングダウン波形の中心周波数と減衰はブラックホールの質量と角運動量(Kerrパラメータ)で決まる。最低次のモード( $l = m = 2$ )では、

$$f_c \simeq 32[\text{kHz}] \times [1 - 0.63(1 - a)^{0.3}] \left( \frac{M}{M} \right)^{-1} \quad (11)$$

$$Q \simeq 2.0(1 - a)^{-0.45} \quad (12)$$

となる[5] 摂動計算は振幅については予想しないが、適当な仮定の下[6]で予測は可能である。インスパイラル同様に質量の関数として探索可能範囲を図4に示す。

### 2.1.3 マッチドフィルター

重力波の波形予想が可能であれば、信号を選別するには検出器信号と予想波形  $h(t)$  (以下テンプレートと記す)の相関をとればよい。

2つの信号の相関は、信号の時間差  $\tau$  の関数として、

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) \cdot s(t) dt \quad (13)$$

とできる。この相関計算は  $\tau$  をすこしづつ動かして行う必要があるが、これをフーリエ変換を用いれば、時間差  $\tau$  は位相に押し込めて、信号とテンプレートのフーリエ変換、およびそれらの積の逆フーリエ変換によって相関が求まる。

$$c(\tau) = \int_{f_1}^{f_2} \tilde{h}^*(f) \cdot \tilde{s}(f) e^{-i2\pi f\tau} df \quad (14)$$

<sup>3</sup>図4で、横軸の質量が  $1.4M_{\odot}$  での値

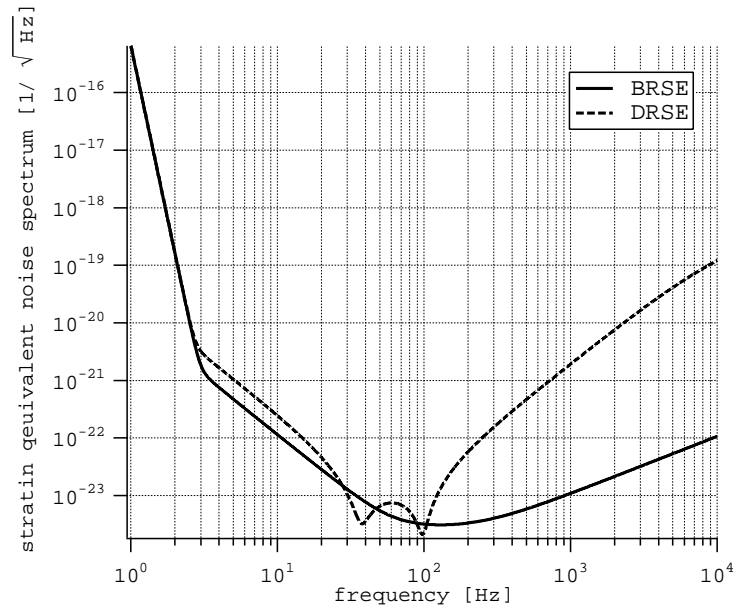


Figure 3: LCGT のデザイン雑音スペクトル (計算 : 宗宮氏)

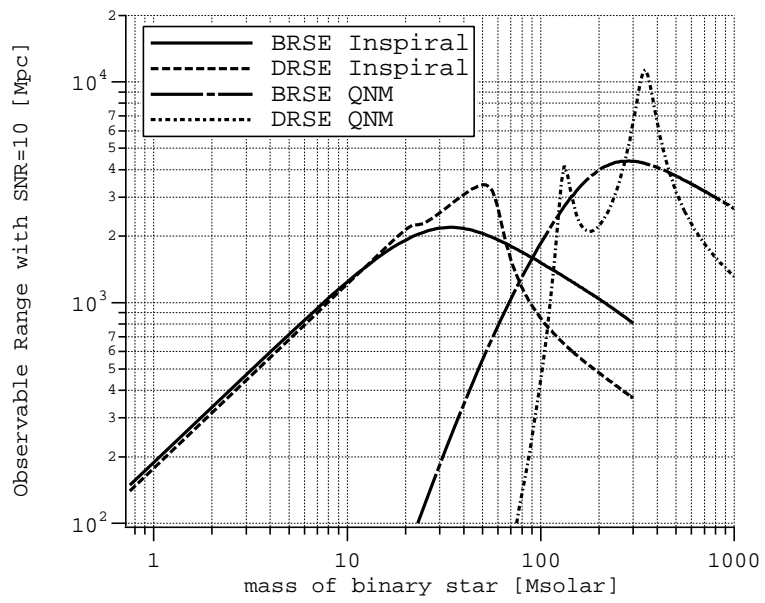


Figure 4: SNR = 10 で観測できる範囲

この数値演算には高速フーリエ変換 (FFT) が用いられる。図 5, 6 に、この例を示す。

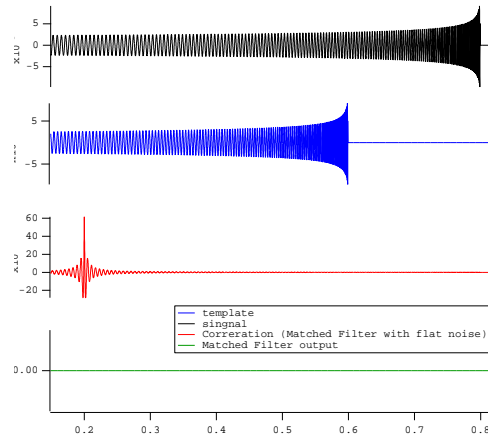


Figure 5: 相関計算例 (チャープ、雑音なし)

さらに、雑音のパワースペクトル  $\widetilde{S}_h(f)$  で重みをとって

$$c(\tau) = \int_{f_1}^{f_2} \frac{\widetilde{h}^*(f) \cdot \widetilde{s}(f)}{\widetilde{S}_h(f)} e^{-i2\pi f\tau} df \quad (15)$$

と求められる。図 5, 6 に、雑音  $\widetilde{S}_h(f)$  がある場合の例を示す。雑音スペクトルによる最適化がはっきりと見てとれる<sup>4</sup>。

重力波の位相、および偏極成分の相対的強さが前もってわからないので、 $h_+$  と  $h_\times$  のテンプレートで求めるそれぞれの相関  $c_+$  と  $c_\times$  について 2 乗和

$$\rho(\tau)^2 = c_+^2 + c_\times^2 \quad (16)$$

を指標にする。重力波の雑音信号比  $SNR$  は

$$SNR = \rho(\tau)/\sqrt{2} \quad (17)$$

で与えられる。

テンプレートと干渉計信号の相関を、ウィナーの最適化フィルターで求める手法であり、これをマッチドフィルターとよぶ。チャープ波の解析であれ

<sup>4</sup>ここでは、雑音として TAMA300 検出器 DT6 の雑音スペクトラムを帯域を切って持ちいた。

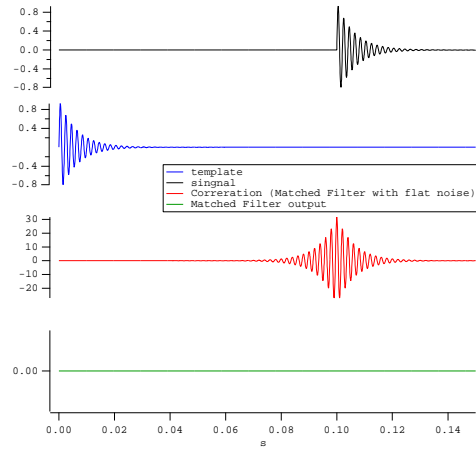


Figure 6: 相関計算例 (リングダウン、雑音なし)

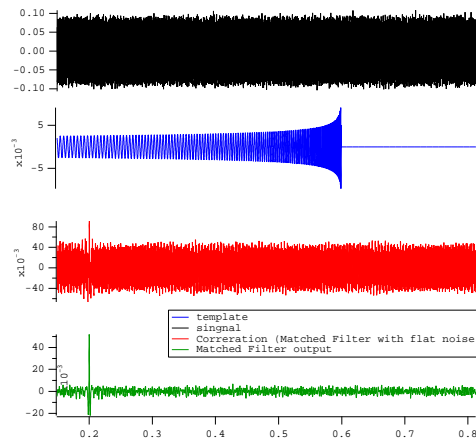


Figure 7: 相関計算例 (チャープ、雑音あり)



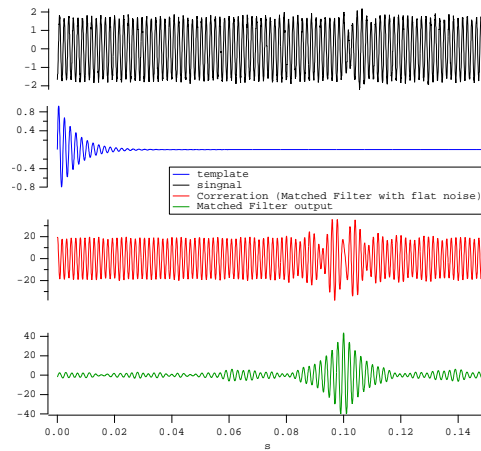


Figure 8: 相関計算例 (リングダウン、雑音あり)

ば、星の質量をすこしずつかえて、多くのテンプレートを準備し、それら全てについて検出器信号と相関を取る。QNM リングダウンの場合も同様に、質量と Kerr パラメータについてテンプレートを準備する。多くのテンプレートのうち、もし検出器信号中に含まれる重力波と同じパラメータのものがあれば、 $\rho(\tau)^2$  が大きな値を持つ。そうして、SNR がある閾値を超えた場合を、イベント候補とする。

閾値の設定であるが、雑音が確率的に閾値を超えて現れる数 (バックグラウンド数) が、問題となるイベントよりも十分に小さくなるように閾値を設定する。例えば、図 9 は、TAMA Data Taking 2 のインスパイラルサーチの結果である [7]。横軸は  $\text{SNR}^2 = \rho^2/2$  をとってある。ここでは  $\text{SNR}^2 > 50$  をイベント候補として上限値を決めた。

## 2.2 バースト重力波 (超新星)

II 型の超新星爆発は、コア崩壊の際に重力波を放出すると予想されている。そのスペクトル等についても多くの予想がある [8] が、コアのダイナミクスを解くことの困難さ (状態方程式、初期条件なども含めて) から、連星合体の場合のような時系列での波形がきちんと予想されてはいない。しかし超新星爆発は多くの観測例がある天体現象で、これを重力波観測の対象とするのは最もである。

超新星からの重力波は、バースト的であり、スペクトルや持続時間についての予想はなされている。<sup>5</sup>そこで、いくつかのバーストフィルターが考えら

<sup>5</sup>時系列ないし位相情報での予想は、計算途中で出てきているものもあるが、探索に使える

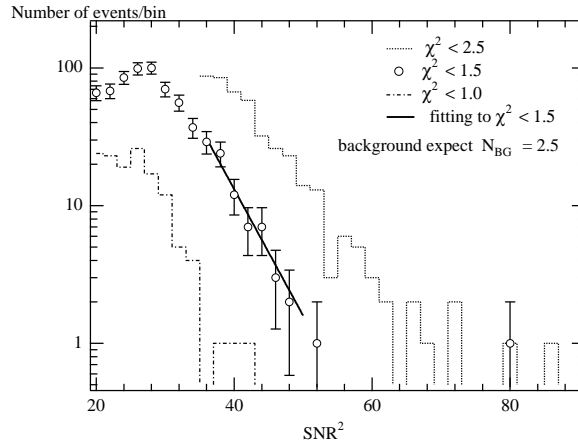


Figure 9: TAMA DT2 でのインスパイラル探索

れている。

TAMA の場合では??、時系列で信号を細かく分割し、ガウス性とドリフトを見ることによってバースト同定を試みている。

$$c_1 = \frac{\langle P_i \rangle}{P_0} - 1 \quad \text{and} \quad c_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\langle P_i^2 \rangle}{\langle P_i \rangle^2} - 2 \right), \quad (18)$$

ここで、 $P_i$  は  $i$  番目の分割のパワー、 $P_0$  はより長い時間間隔での平均値である。 $c_1$  はパワー平均値のドリフトを与え、 $c_2$  ガウス性の指標である。(パワー分布の、1次、2次のモーメントをとっている。)  $c_1 - c_2$  平面上に、データをプロットすると、検出器雑音の平均的な変化は  $c_1$  軸にそって、短い時間でのスパイク状の雑音は  $c_2$  軸方向へ分布する。時系列の分割時間を適当に選ぶことによって、検出器の雑音とはことなる時間的发展をする信号を”バースト”として同定できる。

バースト波の解析は、ソース波形の予想の不確定さゆえに、イベント探索としては確定的な結果を得にくい。しかしソースの頻度は連星合体よりも約束されており、探索のための手法や選別の条件を複数用意すべきである。

### 2.3 連続波

パルサーのような回転天体は、周波数の一定した連続的な重力波源の候補として考えられてきた。TAMA では SN1987a の残滓のパルサー [10] を仮定して探索がなされている [11]。

ような一般性や確定性をもっていない。

連続波の探索は、周波数の一定した重力波を探索するので、手法の原理は単純であるが、

- 長時間積分  
理論予想に比して十分にするには数カ月から 1 年以上
- ドップラー補正
- アンテナパターン補正
- 時刻精度の安定性

といった、解析（およびデータ）の精度が必要になる。

### 3 複数台検出器および他実験との同時観測

重力波イベントを観測するためには、より多くのソースを探せるように検出器を高感度にして探索レンジを広げることはいうまでもないが、イベントの信頼性をあげることも重要である。特に少数イベントでの議論や世界に先駆けて観測を目指すのであれば、統計的な有為性が議論できなくてはならない。それには、複数台の検出器を用いることになる。<sup>6</sup>

また重力波源の特定のためには、すくなくとも 4 か所の離れた検出装置が必要であり、LCGT 以外の実験グループとの同時観測を常に視野におかねばならない。

#### 3.1 複数台（2台）の干渉計 = LCGT 検出器システム

検出の有為性は、最終的に選別のためのパラメーター（ $\rho$  や  $\chi^2$  等）の分布における、雑音によるバックグラウンドの量で決まる。ある選別条件を通過する（と期待される）バックグラウンド数が、観測イベント数よりも有為に少なければイベント検出は信頼できる。イベント選別のためのパラメーターを計算する処理は決まっているので、検出器雑音のスペクトルや安定性が分かっているならば、それらからバックグラウンドの量や分布は予測できる。雑音がガウス性のものだけであれば容易に最終選別に残るバックグラウンド数の期待値が求められる。<sup>7</sup>

相関のない雑音については、2台以上の干渉計を用いてイベントの同時性を要求することにより、バックグラウンド数を劇的に減らすことができる（後述）。

<sup>6</sup>あるいは重力波以外の観測との同時性を要求することもありうる。

<sup>7</sup>あるいは非ガウスであっても、確率分布がきちんと予想できるものであればよい。例えば放射線計測などでは、ランダム分布のようなテールを引く分布が現れるが、素過程や定式化が分かっているので、バックグラウンドを定量評価できる。

また前述のように、実際の干渉計の信号には、非ガウスの、非定常的な雑音が存在する。これら、例えば人工的なものも含む偶発的な外乱などは、雑音の頻度や分布を確定して、シミュレーションや解析計算によりバックグラウンド数を予想するのは難しい。このような雑音であっても、複数の検出器の情報をつかって雑音状態の評価に相補性をもたせることが対策として考えられる。重力波信号相当に補正したデータには、振り子や電気系のフィルターなどの違いによって雑音は複数の干渉計で同じにはならない。

複数台（2台）の干渉計をもって、LCGT 検出器システムとするのが、検出の信頼性の上から重要なことである。

### 3.1.1 偶然に一致する頻度

2つ以上の検出器の出力のバックグラウンドは時間的に無相関であるとする。しかし、偶然、他の検出器と同時<sup>8</sup>にバックグラウンドが発生し得る。このようなものを、Accidental Coincidence と呼ぶ。

2台の場合を考えよう。

- 検出器 A のバックグラウンド頻度は  $f_A$  [個/sec] である。
- 検出器 B のバックグラウンド頻度は  $f_B$  [個/sec] である。
- $f_{A,B} \ll 1$  [個/sec] とする。
- A, B の 2 つのイベントが  $\Delta t$  [sec] 以内にあるとき、この 2 つのイベントは同時イベントとする。

Accidental Coincidence の頻度は、検出器 A の”窓”がバックグラウンドにより  $f_A \cdot \Delta t$  [sec] 開いている間に、B が偶然バックグラウンドを出す確率であるから、

$$f_A \cdot f_B \cdot \Delta t$$

である。2つの検出器が同じ頻度であれば、

$$f^2 \Delta t$$

で与えられる。これに総観測時間  $T$  [sec] をかけたものが同時観測で期待されるバックグラウンド数  $\langle N_{BG} \rangle$  である。

TAMA などの解析で、典型的な時間ウインドウ  $\Delta T$  は 1msec 程度である。1年間 ( $\sim 3 \times 10^7$  [sec]) の観測で  $\langle N_{BG} \rangle < 3 \times 10^{-3}$  個におさえるとすると、

$$f^2 \times 1 \times 10^{-3} \times 3 \times 10^7 < 3 \times 10^{-3}$$

となる。1年間に1イベントを有為に観測するための  $\langle N_{BG} \rangle$ ,  $f$  の値について表に示す。

<sup>8</sup>許容する時間ウインドウ内に、という意味。

Table 1: 2 台同時観測での、年間 1 イベント検出に対するバックグラウンドの要求

有為さ	許容バックグラウンド数 [個/年]	1 台の許容頻度 [個/sec]
$3\sigma$	$2.7 \times 10^{-3}$	$3.0 \times 10^{-4}$
$4\sigma$	$6.3 \times 10^{-5}$	$4.6 \times 10^{-5}$
$5\sigma$	$5.7 \times 10^{-7}$	$4.4 \times 10^{-6}$

## 3.2 離れたサイトとの同時観測

### 3.2.1 重力波源の特定

複数の離れた場所で観測することによって、重力波源の方向を特定することができる。天球上で方向を決めるには、最低 4 か所の検出サイトが必要である。

インスパイラルのような波形がコヒーレントに扱える場合はより洗練された定式化がある [12] が、バースト等の場合も考慮して各検出器の到達時刻の誤差  $\Delta T$  で、重力波源の方向の精度  $\delta\theta$  を計算してみる。TAMA, LIGO(Hanford, Livingston), GEO の 4 か所を用いると、平均的に

$$\delta\theta \text{ [deg]} \simeq \sqrt{\Delta T \text{ [msec]}} \times \begin{cases} 3.5 & \text{(whole sky average)} \\ 4.4 & \text{(galactic event)} \end{cases} \quad (19)$$

のようになる [13]。観測重力波の帯域がせいぜい 10kHz(=1/0.1 msec) であることを考えると、重力波観測で決められる線源の方向は 1 度を切る程度であろう。

## 4 検出の有為性と観測上限値

イベント観測を肯定的に結論する場合でも、観測上限値を求める場合でも、イベント候補 (candidates) は少数である。適当なイベント選別の方法でデータを解析し、時間的にランダムに起きる事象を選別したとする。

- $N_{obs}$  個のイベント候補<sup>9</sup>を得た。
- $N_{ev}$  の本当のイベントが今回の結果に含まれている。なんども測定を繰り返したときの、真の平均は  $\langle N_{ev} \rangle$  個<sup>10</sup>。

<sup>9</sup>“candidates” であって、全てが本物のイベントとは考えない。  $N_{obs}$  の本物の割合を純度 “purity” という。

<sup>10</sup> $N_{ev}$  も  $\langle N_{ev} \rangle$  0 個である場合も含む。  $\langle N_{ev} \rangle$  が 0 でなくても  $N_{ev}$  は 0 がありうる。

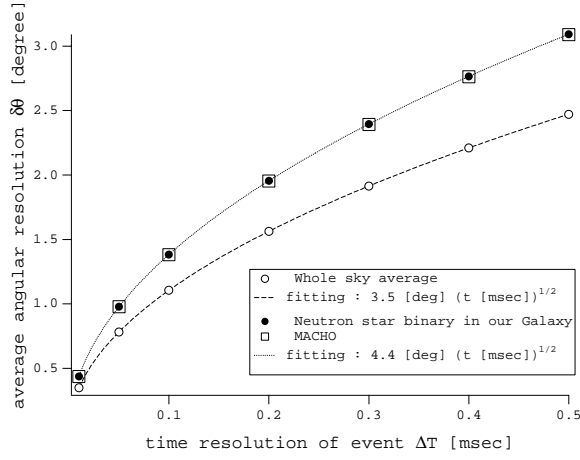


Figure 10: 重力波源方向の決定精度

- $\langle N_{BG} \rangle$  個のバックグラウンド数が混入すると期待され、実際には  $N_{BG}$  個が混入している。<sup>11</sup>バックグラウンドの予想は系統誤差をもつ<sup>12</sup>ので、 $\langle N_{BG} \rangle \pm \delta_{\langle N_{BG} \rangle}$  となる。<sup>13</sup>
- $N_{ev}$  や  $N_{BG}$  は、時間的にはランダムな事象であり、Poisson 分布の確率密度関数  $P$

$$Poisson : P(n; \mu) = \frac{\mu^n e^{-\mu}}{n!}$$

に従い、統計的ゆらぎをもつ。つまり、

$$Poisson : P(N; \langle N \rangle \pm \delta_{\langle N \rangle})$$

ということである。平均値  $\mu$  の Poisson 分布の標準偏差は  $\sqrt{\mu}$  である。 $\mu$  が増加すると、Poisson 分布は Gauß 分布：

$$Gaussian : P(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

にちかづく。すなわち、 $\langle N \rangle \gg 1$  では

$$Gaussian : P\left(N; \langle N \rangle \pm \delta_{\langle N \rangle}, \sqrt{\langle N \rangle \pm \delta_{\langle N \rangle}}\right)$$

<sup>11</sup>やはり本当の数  $N_{BG}$  は知らない。しかし  $\langle N_{BG} \rangle$  は我々は求める。

<sup>12</sup> $\langle N_{BG} \rangle$  はシミュレーションなどの何らかの独立な方法で推定するのであるが、それには計統誤差がともなう。系統誤差は、この取扱の統計誤差よりも十分小さくしなければならならぬ。

<sup>13</sup>ただし、系統誤差は小さくできたとして以降記述から省く。実際に上限値に系統誤差を考える場合は誤差伝搬を計算すれば良い。

と考えて良い。

これら、 $N_{obs}$  や  $\langle N_{ev} \rangle$  がいずれも数個~10 数個と少ない場合を議論する。この場合は、イベントの上限値を決めるか、数個しか期待されない本物を探すかであり、有為性の議論となる。2つのケースのいずれの立場になるかは、 $\langle N_{BG} \rangle$  をどれだけ保障できるかによる。

#### 4.1 観測上限値：イベント候補数が少ない(数個) 場合

$N_{BG}$  が  $N_{obs}$  と同程度の数で、 $N_{obs}$  にイベントは含まれないか、あっても  $N_{ev}$  は特定できないという立場である。 $N_{obs}$  と  $\langle N_{BG} \rangle$  が数個の状態、 $\langle N_{ev} \rangle$  を推定する。

$\langle N_{ev} \rangle$ ,  $\langle N_{BG} \rangle$  それぞれが独立に Poisson 分布に従い、結果として  $N_{obs}$  の個数が選別に残ったと考える。 $\langle N_{ev} \rangle$  上限値を信頼度 (Confidence Level、C.L. と記す)90%で与えるというのは、測定は 10%ぐらいの” 運の悪さ” で少なくとも観測されてしまったと仮定する。

$$C.L. = 1 - \frac{e^{-\langle N_{BG} \rangle + \langle N_{ev} \rangle} \sum_{n=0}^{N_{obs}} \frac{(\langle N_{BG} \rangle + \langle N_{ev} \rangle)^n}{n!}}{e^{-\langle N_{BG} \rangle} \sum_{n=0}^{N_{obs}} \frac{\langle N_{BG} \rangle^n}{n!}}$$

これは Figure11 に示すような関係に成る。

#### 4.2 有為なイベント検出： $N_{obs}$ 中に $N_{ev}$ を肯定する

$N_{BG}$  が  $N_{obs}$  に比べて小さく、真のイベント  $N_{ev}$  が確定できるという立場である。 $N_{ev}$  がイベントであると有為に述べるには、期待されるバックグラウンドによって  $N_{obs}$  が説明できてしまう可能性がすくなければよい。

バックグラウンド・フリー バックグラウンドがほとんどなく、1、2のイベント候補  $N_{obs}$  が真実のイベントであることを示すには、

$$\int_{N_{obs}}^{\infty} P(x; \langle N_{BG} \rangle) dx$$

が十分小さければよい。(わかりやすくいえば、分布がある閾以上に「滲み出す」確率。図 12 参照。)

$\langle N_{BG} \rangle$  が 0 に近く、その確率分布には Poisson 分布を適用とすると、 $N_{obs} = 1, 2$  がバックグラウンドで説明できる確率は表 2, 3 のようになる。

たとえばバックグラウンドの期待値  $\langle N_{BG} \rangle = 0.01$  個ならば、1 個のイベント候補がバックグラウンドによる偽物である確率は 1/100、2 個のイベン

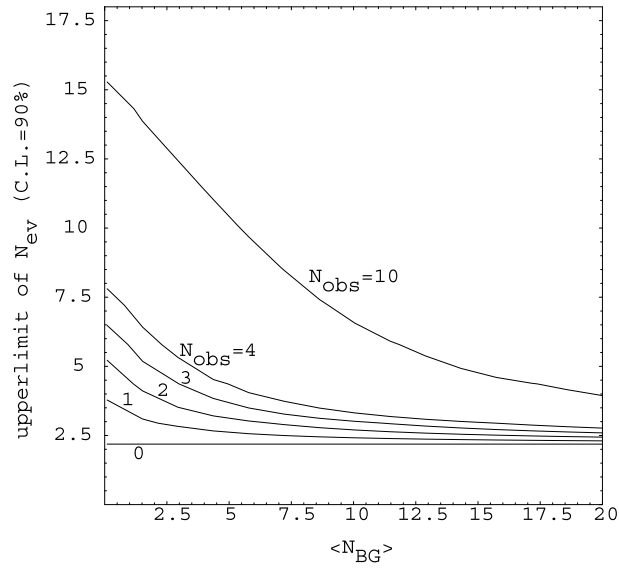


Figure 11: イベント上限値と観測数、バックグラウンドの関係

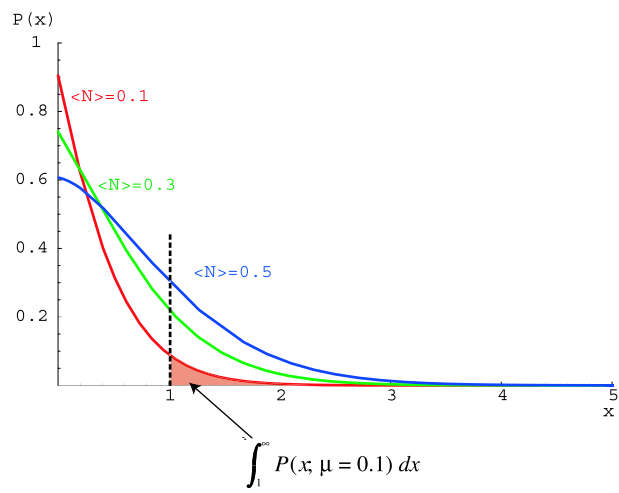


Figure 12: バックグラウンドの「しみ出し」



Table 2: Poisson 分布の滲み出し確率

Poisson の平均値: $\langle N_{BG} \rangle$	$N_{BG} \geq N_{obs}$ の確率	
	$N_{obs} = 1$	$N_{obs} = 2$
0.1	0.095	0.0047
0.01	0.010	$5.0 \times 10^{-5}$
$1 \times 10^{-3}$	$1.0 \times 10^{-3}$	$5.0 \times 10^{-7}$
$1 \times 10^{-4}$	$1.0 \times 10^{-4}$	$5.0 \times 10^{-9}$
$1 \times 10^{-5}$	$1.0 \times 10^{-5}$	$5.0 \times 10^{-11}$
$1 \times 10^{-6}$	$1.0 \times 10^{-6}$	$5.0 \times 10^{-13}$

Table 3: Poisson 分布の滲み出し確率 (2)

Poisson の平均値: $\langle N_{BG} \rangle$	$N_{BG} \geq N_{obs}$ の確率	
	$N_{obs} = 1$	$N_{obs} = 2$
0.3817	0.3173	0.0567
0.04657	0.0455	0.00105
$2.7 \times 10^{-3}$	0.0027	$3.7 \times 10^{-6}$
$6.3 \times 10^{-5}$	$6.3 \times 10^{-5}$	$2.0 \times 10^{-9}$
$5.7 \times 10^{-7}$	$5.7 \times 10^{-7}$	$1.6 \times 10^{-13}$

ト候補が2つとも偽物である確率は1/20000ということになる。逆にいえば、この場合は100個に99個は真のイベントである。

別な表現では、たとえば1イベントの候補に対して0.27%の確率でバックグラウンドが出るには $\langle N_{BG} \rangle = 2.7 \times 10^{-3}$ 個である。後述のGauß分布について示すように、0.27%の確率でバックグラウンドがでるのは $3\sigma$ である。そこで、バックグラウンド期待値 $\langle N_{BG} \rangle = 2 \times 10^{-3}$ 個にたいして1イベントを「 $3\sigma$ の(確からしさの)観測」と表現する<sup>14</sup>。

<sup>14</sup>表3の $N_{obs} = 1$ の欄は表??のGauß分布と対応させているので参考にされたし。

## References

- [1] Thorn K, "Three hundred years of Gravitation", ed. Hawking and Israel, Cambridge University Press
- [2] P.R.Saulson, "Fundamentals of Interferometric Gravitational Wave Detectors", World Scientific
- [3] Cutler C., et al., Phys. Rev. Lett. 70 (1993) 2984
- [4] Blanchet L. and Damour T., Phys.Rev. D46 (1992) 4304
- [5] Echeverria F, Phys. Rev. D40 (1989) 3149
- [6] Flanagan E and Hughes S, Phys. Rev. D57 (1998) 4535
- [7] Tagoshi H, Kanda N, Tanaka T, Tatsumi D, Telada S and the TAMA collaboration, Phys. Rev. D63 (2001) 062001
- [8] 例えは Zwerger T, Müller E, Astronomy & Astrophysics, 320 (1997), 209. など
- [9] Ando M et al., submitted to Class.Quant.Grav.(2003)
- [10] Middleditch, et al., New Astronomy, Vol 5 (2000) 5.
- [11] Soida K et al., submitted to Class.Quant.Grav.(2003)
- [12] Pai A, Dhurandhar S, Bose S, Phys.Rev. D64 (2001) 042004
- [13] Kanda N et al., submitted to Class.Quant.Grav.(2003)