

重力波源についての干渉計の全天応答平均

大阪市立大学 神田展行

平成 21 年 9 月 5 日

1 干渉計のアンテナパターン

重力波源の方位と波の偏極方向を、干渉計に固定した座標系で図 1 のように定義する。ここで、入射角（天頂角 θ 、方位角 ϕ ）は干渉計の 2 本の腕をそれぞれ x, y 軸方向、天頂を z 軸にとる。また h_+, h_\times の偏極方向は重力波の波面に x', y' 軸をとり、軸方向の偏極を +, それから 45 度回転したものを \times とする。

干渉計の重力波にたいする応答は、重力波源の方位（= 重力波の入射方向）と波の偏極方向に依存する。これがアンテナパターンである。最大応答を 1 に規格化したアンテナパターン: $F(\theta, \phi, \psi)$ は、 h_+, h_\times それぞれの偏極について、

$$F_+ = \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta) \cos 2\phi \cos 2\psi - \cos \theta \sin 2\phi \sin 2\psi \quad (1)$$

$$F_\times = \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta) \cos 2\phi \sin 2\psi + \cos \theta \sin 2\phi \cos 2\psi \quad (2)$$

と与えられる [1]。

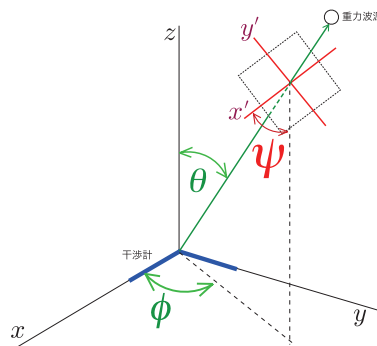


図 1: 座標と角度の定義

$F_{+, \times}$ の様子を図2に示す。 F_+ と F_{\times} は、偏極方向 ψ が $2/\pi$ 回っただけのものである。また ψ が $2/\pi$ の整数倍でない場合は、 F_+ または F_{\times} のみのアンテナパターンは、図1(b)が z 軸を中心に上下反対方向にねじれたような、 x - y 平面について非対称な形になる。

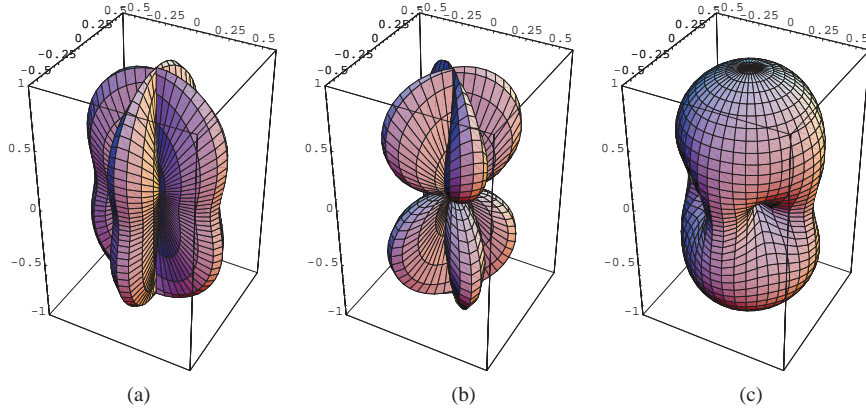


図 2: アンテナパターン (a) $F_+(\theta, \phi, 0)$, (b) $F_{\times}(\theta, \phi, 0)$, (c) $\sqrt{F_+^2(\theta, \phi, \psi) + F_{\times}^2(\theta, \phi, \psi)}$ 註: (c) の 2 乗平均の場合、 ψ に依存しない

1.1 全天応答平均の定義

干渉計がもっとも感度がよいのは天頂(および直下)入射である。TAMA では重力波が天頂方向から入射し、源の方向が最適である場合に信号雑音比 SNR の期待値: $\langle \text{SNR} \rangle \geq 10$ を得られる距離を、最大検出レンジ: R [pc] としている。

宇宙のどれだけの体積を探索できるかを表す指標として、等方的な半径何 [pc] の球内が探索範囲であることを示すのがわかりやすい。これを実効検出レンジ (*Effective distance for the detection*): R_{eff} とする。

最大検出レンジを実効検出レンジに換算するには、式 1,2 で与えたアンテナパターン、線源の放射パターン、偏極方向を考慮しなければならない。

直截的な方法としては、アンテナパターン(と線源の方向)にしたがった重率を R にかけて体積を求めればよい¹。ただし、選別につかうイベントらしさは $\langle \text{SNR} \rangle^2$ であるので、 $F_{+, \times}$ を全天について 2 乗平均: $\sqrt{\langle F^2 \rangle} = F_{rms}$

¹別な方法では、たとえば Finn らは体積内に線源を一様分布させてシミュレーションを行っている [2]

をとる [3]。すなわち、

$$\frac{4}{3}\pi R_{eff}^3 \equiv \frac{4}{3}\pi (\langle F_{rms} \rangle R)^3 \quad (3)$$

であり、 $R_{eff}/R = F_{rms}$ をアンテナ応答の全天平均と定義する。
また干渉計が得る信号は、2 偏極を合成した

$$h_{obs} = F_+ h_+ + F_\times h_\times \quad (4)$$

であり、この場合のアンテナの応答: F は

$$F = \frac{h_{obs}}{h_+ + h_\times} = \frac{F_+ h_+ + F_\times h_\times}{h_+ + h_\times} \quad (5)$$

と考えるべきである。

そこで、全天平均を求めるにあたって、

- 重力波源は全方位に一様に分布する。
- 重力波源の方向（連星軌道の法線方向や Kerr ブラックホールの角運動量方向など）は一様である。

とする。

2 各種重力波源と全天応答平均

2.1 直線偏極重力波源

まずもっとも単純な場合として、重力波が1つの偏極成分しかもたない場合を考える。全天平均応答は、

$$F_{rms} = \left\langle \sqrt{\frac{\int F_{+, \times}^2(\theta, \phi, \psi) d\Omega}{4\pi}} \right\rangle \quad (6)$$

である。積分を重力波の入射方向 θ, ϕ についておこなうと、

$$\int F_+^2 d\Omega = \frac{1}{128}\pi \left(102 + \frac{4}{5} \cos^2 2\psi + \frac{50}{3} \cos 4\psi \right) \quad (7)$$

$$\int F_\times^2 d\Omega = \frac{1}{128}\pi \left(102 + \frac{4}{5} \cos^2 2\psi - \frac{50}{3} \cos 4\psi \right) \quad (8)$$

であり、さらに偏極 ψ について $[0, 2\pi]$ で平均すると、全天平均応答は、

$$\begin{aligned} F_{rms}^{pol.} &= \sqrt{\frac{\int F_{+, \times}^2 d\psi}{4\pi}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned} \quad (9)$$

を得る²。

2.2 無偏極

まずある入射方向について

$$\begin{aligned} F(\theta, \phi)^2 &= \left(\frac{h_{obs}}{h_+ + h_\times} \right)^2 \\ &= \left(\frac{F_+(\theta, \phi) h_+ + F_\times(\theta, \phi) h_\times}{h_+ + h_\times} \right)^2 \end{aligned} \quad (10)$$

無偏極の場合には、2つの偏極成分 h_+ と h_\times は同じ大きさであり、位相は無相関であると考えられる。したがって、 $\langle h_+ \rangle = \langle h_\times \rangle \equiv \bar{h}$ 、かつ cross term の期待値: $\langle h_+ h_\times \rangle = 0$ とすれば、

$$\begin{aligned} \langle F(\theta, \phi)^2 \rangle &= \left\langle \frac{F_+^2 \bar{h}^2 + F_\times^2 \bar{h}^2}{2\bar{h}^2} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{2}(F_+^2 + F_\times^2) \right\rangle \end{aligned} \quad (11)$$

さらに、全天について平均を取れば、

$$\begin{aligned} F_{rms}^{non-pol.} &= \sqrt{\frac{\int \langle \frac{1}{2}(F_+^2(\theta, \phi) + F_\times^2(\theta, \phi)) \rangle d\Omega}{4\pi}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} = 0.4472... \end{aligned} \quad (12)$$

となる³。

2.3 連星合体のインスパイラル波

2.3.1 放射の角分布

連星合体のインスパイラル波についての全天平均をもとめるために、重力波の放射角分布を考慮する。図3のように、連星軌道の法線と重力波の

²偏極方向について一様にして平均するということは、無偏極の場合と同じ結果になる。また F_+ と F_\times は偏極 ψ が $\pi/4$ 違うだけなので、平均は同じ

³この結果はよく知られているが、 $\sqrt{1/2}$ を忘れていた場合が散見される

放射方向の角度を ϵ とする。ポストニュートン近似の最低次の項: $H_{+, \times}^{(0)}$ は [4]、

$$H_+^{(0)} = -\frac{1}{2} (1 + \cos^2 \epsilon) \cos 2\alpha, \quad H_\times^{(0)} = -\frac{1}{2} (2 \cos \epsilon) \sin 2\alpha \quad (13)$$

で与えられる。ここで α は時間発展する軌道位相の項である⁴。

$$S_+^{(0)} = -\frac{1}{2} (1 + \cos^2 \epsilon), \quad S_\times^{(0)} = -\frac{1}{2} (2 \cos \epsilon) \quad (14)$$

とすれば、放射振幅の角分布は、 $|S_+^{(0)}|$, $|S_\times^{(0)}|$ で与えられる (図 4)。検出器側からみれば、 ϵ によって、偏極成分比が与えられると考えればよい。

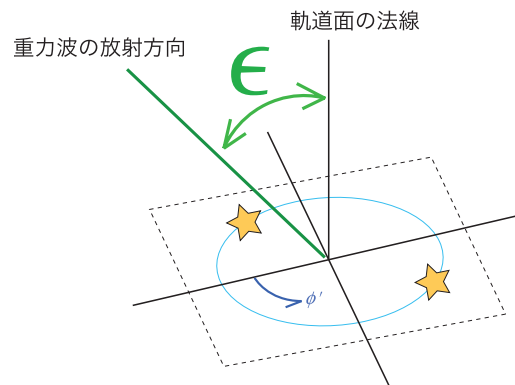


図 3: 連星軌道と放射角

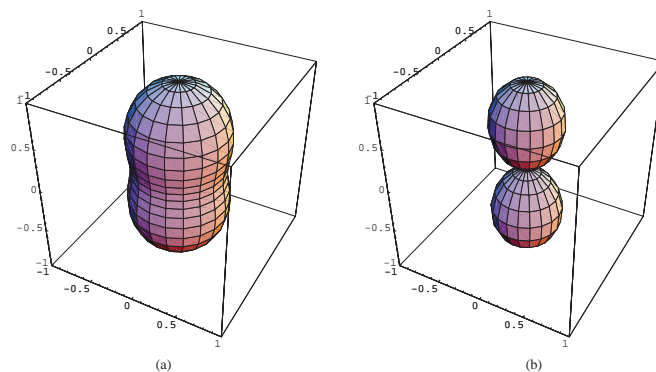


図 4: 連星合体の放射角分布

⁴ある瞬間には ωt と考えても差し支えない

なお、

$$\begin{aligned}
\langle (S_+^{(0)})^2 \rangle &= \frac{1}{4\pi} \int d\Omega (S_+^{(0)}(\epsilon))^2 \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^\pi (S_+^{(0)}(\epsilon))^2 \sin \epsilon \, d\epsilon \\
&= \frac{7}{15}
\end{aligned} \tag{15}$$

同様に、

$$\langle (S_\times^{(0)})^2 \rangle = \frac{1}{3} \tag{16}$$

である。

2.4 全天平均

ある入射方向、軌道の法線方向について検出器が得る信号は、

$$\begin{aligned}
h_{obs}(t) &= F_+ h_+(t) + F_\times h_\times(t) \\
&= F_+ S_+^{(0)} \cos 2\alpha(t) + F_\times S_\times^{(0)} \sin 2\alpha(t) \\
&= \sqrt{(F_+ S_+^{(0)})^2 + (F_\times S_\times^{(0)})^2} \cos(2\alpha(t) + \phi_0)
\end{aligned} \tag{17}$$

である。

重力波放射が最大の方法は軌道の法線方向であり、そのときに $|S_+^{(0)}| = |S_\times^{(0)}| = 1$ なので、その方向での時間平均を \bar{h} とすると、検出器の信号の時間平均 $\overline{h_{obs}}$ について、

$$\overline{h_{obs}} = \sqrt{(F_+ S_+^{(0)})^2 + (F_\times S_\times^{(0)})^2} \bar{h} \tag{18}$$

であり、したがって検出器の応答は

$$F(\theta, \phi, \psi)^2 = (F_+ S_+^{(0)})^2 + (F_\times S_\times^{(0)})^2 \tag{19}$$

となる。

これを全天入射方向 θ, ϕ 、偏極方向 ψ 、および偏極成分比 ϵ で平均する。

$$\begin{aligned}
\langle F^2 \rangle &= \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\psi \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^\pi \sin \epsilon \, d\epsilon [(F_+ S_+^{(0)})^2 + (F_\times S_\times^{(0)})^2] \\
&= \frac{4}{25}
\end{aligned} \tag{20}$$

よって

$$\begin{aligned} F_{rms}^{Inspirial} &= \sqrt{\langle (F_+ S_+^{(0)})^2 + (F_\times S_\times^{(0)})^2 \rangle} \\ &= 0.4 \end{aligned} \tag{21}$$

となる。

2.5 ブラックホールリングダウン重力波

準備中。

3 その他の計算など

表 1:

重力波源	全天平均応答 F_{rms}
直線偏極	$1/\sqrt{5} = 0.4472\dots$
無偏極	$1/\sqrt{5} = 0.4472\dots$
連星合体 (インスパイラル)	$\sqrt{\frac{4}{25}} = 0.4$
ブラックホールリングダウン	(準備中)

参考文献

- [1] Kip Thorn 重力の300年
- [2] Finn の LIGO レンジの論文
- [3] GRASP マニュアル
Flanagan and Huges, 1998 など
- [4] Blanchet