Maximal likelihood法に基づくMatched filterについて

Ref: Finn, PRD63, 102001 (2001)

Pai, Dhurandhar, Bose, PRD64, 042004 (2001)

Helstrom, “Statistical Theory of Signal Detection”, (Pergamon, 1968)

田越秀行(阪大理)

2004.4.22 LCGTコヒーレンス解析WG

2004.4.26 修正

Maximal likelihood法に基づくMatched filterについて

ガウス的時系列データ+信号のとき

Finn, PRD46, 5236 (1992)

$$g(t) = \begin{cases} n(t) \\ n(t) + s(t;\mu) \end{cases} \quad ; s(t;\mu): \text{signal}, \quad \mu: \text{parameter}$$

Likelihood ratio

$$\Lambda = \frac{P(g \mid s(\mu))}{P(g \mid 0)}$$

$P(g \mid s(\mu))$:sが存在するとき, gを観測する確率

$P(g \mid 0)$:sが存在しないとき, gを観測する確率

$n(t) = g(t) - s(t,\mu)$より$P(g \mid s(\mu)) = P(g - s(\mu) \mid 0)$と書ける

よって$P(g \mid 0)$を求めればよい.

ノイズ $n(t)$: 平均値=0のガウス過程とする

ノイズだけの時，個々の g_i は $P(g_i|0)=\dfrac{\exp\left[-\dfrac{1}{2}\dfrac{g_i^2}{C_n(0)}\right]}{[2\pi C_n(0)]^{1/2}}$ に従う

$g=\{g_i; i=1,\cdots,N\}$は， $P(g|0)=\dfrac{\exp\left[-\dfrac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{N}C_{jk}^{-1}g_j g_k\right]}{[(2\pi)^N \det\left\|C_{n,ij}\right\|]^{1/2}}$ に従う

$$C_n(\tau): \text{correlation function}$$

$$C_{n,ij}=C_n[(i-j)\Delta t]$$

連続極限: $\lim_{\substack{\Delta t\to 0\\ T\to\infty}}\sum_{j,k=1}^{N}C_{jk}^{-1}g_j g_k = 2\int_{-\infty}^{\infty}df\,\dfrac{\tilde{g}(f)\tilde{g}^*(f)}{S_n(|f|)}$

$\langle g,h\rangle = 2\int_{-\infty}^{\infty}df\,\dfrac{\tilde{g}(f)\tilde{h}^*(f)}{S_n(|f|)}$ とおくと，

$$\Lambda=\frac{P(g|s(\mu))}{P(g|0)}=\frac{P(g-s(\mu)|0)}{P(g|0)}=\exp\left[\langle g,s(\mu)\rangle-\frac{1}{2}\langle s(\mu),s(\mu)\rangle\right]$$

未知パラメータを含むとき

Maximum-likelihood estimate: $\hat{\mu}_{ML}$:$\Lambda(\mu)$ を最大にする μ

Maximum-likelihood 検定: $\max_{\mu} \Lambda(g,\mu) \geq k$ のとき，検出とする

対応するfalse alarm 確率は $P_0[\max_{\mu} \Lambda(g,\mu) \geq k] = \alpha$

- 信号の振幅 θ $s(t,\theta) = \theta\, s(t)$ と信号が表されている

$$\ln \Lambda(g,\theta) = \theta \langle g, s \rangle - \frac{1}{2}\theta^2 \langle s, s \rangle$$

これを最大にする $\theta_{ML} = \dfrac{\langle g, s \rangle}{\langle s, s \rangle}$ を代入すると

$$\ln \Lambda(g,\theta_{ML}) = \frac{1}{2}\frac{\langle g, s \rangle^2}{\langle s, s \rangle}\left(\equiv \frac{1}{2}\rho^2 \right)$$

$$\overline{\rho^2} = 1$$

S/N比 : $\rho^2 = \dfrac{\langle g, s \rangle^2}{\langle s, s \rangle} = \langle g, \hat{s} \rangle^2, \quad \hat{s} \equiv s / \langle s, s \rangle^{1/2}$

$$\left(\rho = 2\int_{-\infty}^{\infty} df\, \frac{\tilde{g}(f)\tilde{s}^*(f)}{S_n(|f|)} \right)$$

検出器が複数台ある時について

それぞれの検出器のノイズがお互いに独立ならば，
複数台の検出器があるときの，全体のlikelihood ratio λ は
個々の検出器のLRの積で書ける

$$g^I(t) = n^I(t) + s^I(t)$$

$$\ln\lambda = \sum_{I=1}^{N} \ln\lambda_{(I)} = \sum_{I=1}^{N}\left(\left\langle g^I, s^I\right\rangle_{(I)} - \frac{1}{2}\left\langle s^I, s^I\right\rangle_{(I)}\right)$$

$s^I(t) = \theta s'^I(t)$ と，検出器によらない振幅を取り出す

$$\ln\lambda = \theta\sum_{I=1}^{N}\left\langle g^I, s'^I\right\rangle_{(I)} - \frac{1}{2}\theta^2\sum_{I=1}^{N}\left\langle s'^I, s'^I\right\rangle_{(I)}$$

$\ln\lambda$ を最大にする θ は $\theta = \dfrac{\sum_{I=1}^{N}\left\langle g^I, s'^I\right\rangle_{(I)}}{\sum_{I=1}^{N}\left\langle s'^I, s'^I\right\rangle_{(I)}}$

このときの$\ln\lambda$は

$$\ln\lambda = \frac{1}{2}\frac{\left(\sum_{I=1}^{N}\left\langle g^{I}, s'^{I}\right\rangle_{(I)}\right)^2}{\sum_{I=1}^{N}\left\langle s'^{I}, s'^{I}\right\rangle_{(I)}} \equiv \frac{1}{2}\rho^2$$

従って，検出器の感度に差があるとき，感度の悪い検出器からの寄与は，自動的に小さくなる．

これは平均値が　$\overline{\rho^2} = 1$　と規格化されたS/Nとなる

もしすべての検出器が同一ならば，

$$\rho^2 = 2\ln\lambda = \frac{\left(\sum_{I=1}^{N}\left\langle g^{I}, s'\right\rangle_{(I)}\right)^2}{\sum_{I=1}^{N}\left\langle s', s'\right\rangle_{(I)}} = \frac{1}{N\left\langle s', s'\right\rangle}\left(\sum_{I=1}^{N}\left\langle g^{I}, s'\right\rangle_{(I)}\right)^2$$

となる．

ある振幅Aをもつ信号を各検出器へ入射させる

$$g^I = As'(t) + n^I(t)$$

すると,

$$\rho^2 = \frac{1}{N\langle s', s'\rangle}\left(\sum_{I=1}^{N}\langle As' + n^I, s'\rangle\right)^2 = \frac{1}{N\langle s', s'\rangle}\left(NA\langle s', s'\rangle + \sum_{I=1}^{N}\langle n^I, s'\rangle\right)^2$$

$$= NA^2\langle s', s'\rangle + 2A\sum_{I=1}^{N}\langle n^I, s'\rangle + \frac{\left(\sum_{I=1}^{N}\langle n^I, s'\rangle\right)^2}{N\langle s', s'\rangle}$$

平均値

$$\overline{\rho^2} = NA^2\langle s', s'\rangle + 1, \quad \left(\overline{\langle n^I, s'\rangle\langle n^{I'}, s'\rangle} = \delta^{I,I'}\langle s', s'\rangle\right)$$

一方, 各検出器単独のS/Nは $\overline{\rho_{one}^2} = A^2\langle s', s'\rangle + 1$

$A \gg 1$

$$\frac{\sqrt{\overline{\rho^2}}}{\sqrt{\overline{\rho_{one}^2}}} = \sqrt{N}$$

S/Nは約 $\sqrt{N}$ 倍

S/Nの2乗和によるネットワークS/Nについて

Pai et al. (PRD64, 042004)：Inspiralの場合について，位相，偏極角，inclination角について，解析的に最大化した．その結果，rhoは各検出器からのrhoの２乗和の形となる．もし，各検出器からのrhoの２乗和を取ると，

$$\overline{\rho_{qsum}^2} \equiv \sum_{I=1}^{N} \overline{\rho_{one}^2} = NA^2 \langle s', s' \rangle + N$$

A=0の時には， $\overline{\rho_{qsum}^2} = N$

つまり，ρ_{qsum}^2 を規格化されたS/Nと解釈するためには
Nで割る必要がある．

Nで割ってしまうと，信号がある時の ρ_{qsum}^2 の期待値は
１台の検出器の値と同じ． $\overline{\rho_{qsum}^2} / N = A^2 \langle s', s' \rangle + 1 = \overline{\rho_{one}^2}$

つまり， ρ にはS/Nのゲインが読みとれない．

より詳細には，確率分布関数を使い，false alarm rateを固定して検出効率を比較する必要がある.

信号がないときには，カイ2乗分布の自由度を増やすことになるので，同じS/Nでのfalse alarm rateは小さくなり，false alarm rateを固定すれば，S/Nの閾値が下がり，検出効率が向上する.

しかし，2乗和によるネットワークS/Nの定義は，我々が期待する性質を持っておらず，注意が必要.

少し疑問:解析的な最大化を取る前と後での検出効率の差はあるか？

参考: Matched filter の性質 (最大S/Nフィルター)

検出器出力: $g(t) = n(t) + h(t)$

フィルター: $q(t)$

フィルター出力 $c(t) = (g \circ q)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' g(t') q(t'+t) dt' = \int_{-\infty}^{\infty} df \, \tilde{g}(f) \tilde{q}^*(f) e^{2\pi i f t}$

$$\left(\frac{S}{N}\right)^2 = \frac{\langle c(t) \rangle^2}{\left\langle \left[c(t) - \langle c(t) \rangle^2 \right] \right\rangle} = \frac{\left(\int_{-\infty}^{\infty} df \, \tilde{h}(f) \tilde{q}^*(f) e^{2\pi i f t} \right)^2}{\int_{-\infty}^{\infty} df \, S_n(f) |\tilde{q}(f)|^2} = \frac{\left(\frac{h(f)}{S_n(f)}, \tilde{q} e^{-2\pi i f t} \right)^2}{\left(\tilde{q} e^{-2\pi i f t}, \tilde{q} e^{-2\pi i f t} \right)}$$

$$(\tilde{a}, \tilde{b}) \equiv \int S_n(f) \tilde{a}(f) \tilde{b}^*(f) df$$

(S/N)**を最大にするのは** $\tilde{q} = \frac{\tilde{h}}{S_n} e^{2\pi i f t}$ のときで，その時

$$c(t) = \int_{-\infty}^{\infty} df \, \frac{\tilde{g}(f) \tilde{h}^*(f)}{S_n(f)}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)^2_{\max} = \int_{-\infty}^{\infty} df \, \frac{|\tilde{h}(f)|^2}{S_n(f)}$$