LCGTイベント探索の統計的可能性について

大阪市立大学 神田展行

January 14, 2003

LCGTで年間1個のイベント発見を十分な統計的確信で示すためには、

- 選別に残るバックグラウンド数の期待値を 6×10^{-7} 個以下に落すこと（5σ 相当）
- そのためには、2つの検出器でそれぞれからのバックグラウンドの頻度が 10^{-6}[個/sec] 以下

が必要である。

1 小数統計の基本的な考え方

適当なイベント選別の方法でデータを解析し、時間的にランダムな事象を選別したとする。

- N_{obs} 個のイベント候補[1]を得た。
- N_{ev} の本当のイベントが今回の結果に含まれている。なんども測定を繰り返したときの、真の平均は $\langle N_{ev} \rangle$ 個[2]。
- $\langle N_{BG} \rangle$ 個のバックグラウンド数が混入すると期待され、実際には N_{BG} 個が混入している。[3]バックグラウンドの予想は系統誤差をもつ[4]ので、

[1] "candidates" であって、全てが本物のイベントとは考えない。N_{obs} の本物の割合を純度 "purity" という。

[2] N_{ev} も $\langle N_{ev} \rangle 0$ 個である場合も含む。$\langle N_{ev} \rangle$ が 0 でなくても N_{ev} は 0 がありうる。いづれも値は神様しか知らない。だから統計で議論する。

[3] やはり N_{BG} は本当の数は神様も知らない。しかし $\langle N_{BG} \rangle$ は我々は求めうる。

[4] $\langle N_{BG} \rangle$ はシミュレーションなどの何らかの独立な方法で推定するのであるが、それには計統誤差がともなう。系統誤差は、この取扱の統計誤差よりも十分小さいくなければならならない。

$\langle N_{BG}\rangle \pm \delta_{\langle N_{BG}\rangle}$ となる。[5]

- N_{ev} や N_{BG} は、時間的にはランダムな事象であり、Poisson 分布、の確率密度関数 P
$$Poisson: \; P\left(n\,;\mu\right) = \frac{\mu^n e^{-\mu}}{n!}$$
に従い、統計的ゆらぎをもつ。つまり、
$$Poisson: \; P\left(N;\,\langle N\rangle \pm \delta_{\langle N\rangle}\right)$$
ということである。平均値 N の Poisson 分布の標準偏差は $\sqrt{N}$ である。N が増加すると、Poisson 分布は Gauß分布：
$$Gau\beta ian: \; P\left(x;\,\mu,\,\sigma\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$
にちかづく。すならち、 $N \gg 1$ では
$$Gau\beta ian: \; P\left(N;\,\langle N\rangle \pm \delta_{\langle N\rangle},\,\sqrt{\langle N\rangle \pm \delta_{\langle N\rangle}}\right)$$
と考えて良い。

これら、N_{obs} や $\langle N_{ev}\rangle$ がいづれも数個˜10 数個と少ない場合を議論する。この場合は、イベントの上限値を決めるか、数個しか期待されない本物を探すかであり、有為性の議論となる。2 つのケースのいづれの立場になるかは、$\langle N_{BG}\rangle$ をどれだけ保障できるかによる。

1.1 $\langle N_{ev}\rangle$ の上限値を議論する場合

N_{BG} が N_{obs} と同程度の数で、N_{obs} にイベントは含まれないか、あっても N_{ev} は特定できないという立場である。N_{obs} と $\langle N_{BG}\rangle$ が数個の状態で、$\langle N_{ev}\rangle$ を推定する。

$\langle N_{ev}\rangle$, $\langle N_{BG}\rangle$ それぞれが独立に Poisson 分布に従い、結果として N_{obs} の個数が選別に残ったと考える。$\langle N_{ev}\rangle$ 上限値を信頼度 (Confidence Level、C.L. と記す)90%で与えるというのは、測定は 10%ぐらいの" 運の悪さ" で少なく観測されてしまったと仮定する。

$$C.L. \;=\; 1 \;-\; \frac{e^{-\;(\langle N_{BG}\rangle+\langle N_{ev}\rangle)} \sum_{n\;=\;0}^{N_{obs}} \frac{(\langle N_{BG}\rangle \;+\; \langle N_{ev}\rangle)^n}{n!}}{e^{-\;\langle N_{BG}\rangle} \sum_{n\;=\;0}^{N_{obs}} \frac{\langle N_{BG}\rangle^n}{n!}}$$

これは図 1 に示すような関係に成る。

[5]ただし、系統誤差は小さくできたとして以降記述から省く。実際に上限値に系統誤差を考える場合は誤差伝搬を計算すれば良い。

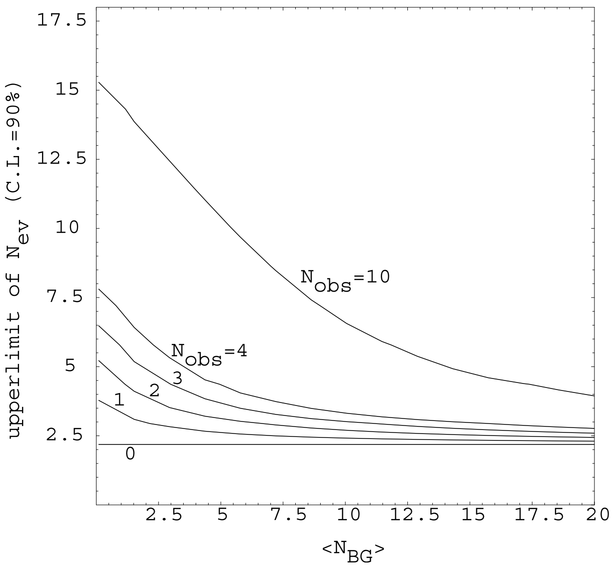

Figure 1: **イベント上限値と観測数、バックグラウンドの関係**

1.2 N_{obs} 中に N_{ev} を肯定＝有為な観測とする

N_{BG} が N_{obs} に比べて小さく、真のイベント N_{ev} が確定できるという立場である。N_{ev} がイベントであると有為に述べるには、期待されるバックグラウンドによって N_{obs} が説明できてしまう可能性がすくなければよい。

バックグラウンド・フリー　バックグラウンドがほとんどなく、1、2 のイベント候補 N_{obs} が真実のイベントであることを示すには、

$$\int_{N_{obs}}^{\infty} P\left(x;\,\langle N_{BG}\rangle\right) dx$$

が十分小さければよい。（わかりやすくいえば、分布がある閾以上に「滲み出す」確率。図 2 参照。）

$\langle N_{BG}\rangle$ が 0 に近く、その確率分布には Poisson 分布を適用とすると、$N_{obs} = 1, 2$ がバックグラウンドで説明できる確率は表 1, 2 のようになる。

たとえばバックグラウンドの期待値 $\langle N_{BG}\rangle = 0.01$ 個ならば、1 個のイベント候補がバックグラウンドによる偽物である確率は 1/100、 2 個のイベント候補が 2 つとも偽物である確率は 1/20000 ということになる。逆にいえば、この場合は 100 個に 99 個は真のイベントである。

別な表現では、たとえば 1 イベントの候補に対して 0.27%の確率でバックグラウンドが出るには $\langle N_{BG}\rangle = 2.7 \times 10^{-3}$ 個である。後述の Gauß分布につ

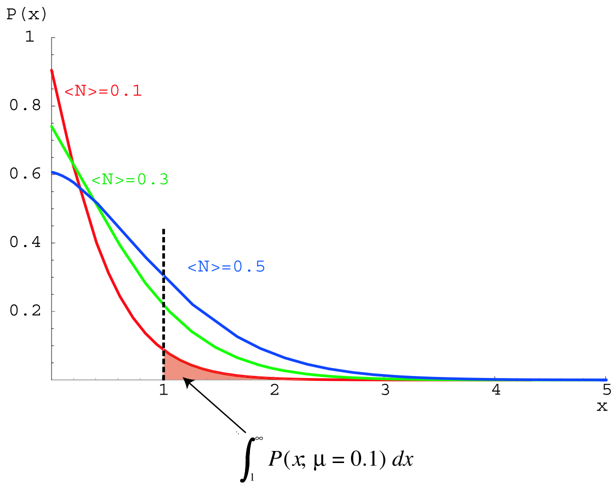

Figure 2: **バックグラウンドの「滲み出し」**

Table 1: Poisson 分布の滲み出し確率

Poisson の平均値: $\langle N_{BG} \rangle$	$N_{BG} \geq N_{obs}$ の確率 $N_{obs} = 1$	$N_{obs} = 2$
0.1	0.095	0.0047
0.01	0.010	5.0×10^{-5}
1×10^{-3}	1.0×10^{-3}	5.0×10^{-7}
1×10^{-4}	1.0×10^{-4}	5.0×10^{-9}
1×10^{-5}	1.0×10^{-5}	5.0×10^{-11}
1×10^{-6}	1.0×10^{-6}	5.0×10^{-13}

Table 2: Poisson 分布の滲み出し確率 (2)

Poisson の平均値: $\langle N_{BG} \rangle$	$N_{BG} \geq N_{obs}$ の確率 $N_{obs} = 1$	$N_{obs} = 2$
0.3817	0.3173	0.0567
0.04657	0.0455	0.00105
2.7×10^{-3}	0.0027	3.7×10^{-6}
6.3×10^{-5}	6.3×10^{-5}	2.0×10^{-9}
5.7×10^{-7}	5.7×10^{-7}	1.6×10^{-13}

いて示すように、0.27%の確率でバックグラウンドがでるのは 3σ である。そこで、バックグラウンド期待値 $\langle N_{BG}\rangle = 2\times 10^{-3}$ 個にたいして 1 イベントを「3σ の（確からしさの）観測」と表現する[6]。

$N_{obs} > \langle N_{BG}\rangle$ **ではあるが、バックグラウンド・フリーではない場合**　前述の上限値のケースに近いが、$\langle N_{BG}\rangle$ にくらべて十分おおきな N_{ev} を得ているとするのならば、

$$N_{ev} = N_{obs} - \langle N_{BG}\rangle$$

が

$$\int_{\delta}^{\infty} P(x)\, dx$$

よりもどれだけ大きいかで有為性を示す。ここで δ がいわば安全マージンである。Gauß分布の場合、$\delta = n\sigma$ とした場合のこの積分は表 4 のように n で決まる[7]。

Table 3: Gauß分布の滲み出し確率

δ	δ 以上の確率
1σ	0.3173
2σ	0.0455
3σ	0.0027
4σ	6.3×10^{-5}
5σ	5.7×10^{-7}
6σ	2.0×10^{-9}

Table 4: Gauß分布の滲み出し確率 (2)

δ	δ 以上の確率
1.28σ	0.20
1.64σ	0.10
1.96σ	0.05
2.58σ	0.01
3.29σ	0.001
3.89σ	0.0001

[6]表 2 の $N_{obs} = 1$ の欄は表 3 の Gauß分布と対応させているので参考にされたし。

[7]計数によらず一般に Gauß分布であれば、平均値に関係なく σ の大きさで決まる。もっとも、ランダム計数であれば $\sigma = \sqrt{N}$ なのでこの場合は間接的には依存するが。また Poisson 分布も偏差は $\sqrt{N}$ であるが、$n\sqrt{N}$ 以上の値をとる確率は N により変化するので注意。

そこで、

$$n = \frac{N_{ev}}{\sigma_{BG}} = \frac{N_{obs} - \langle N_{BG} \rangle}{\sqrt{N_{BG}}}$$

を、「イベントは $n\sigma$（有為）である」という。通常 n は既知の現象でも 3 以上、未知の現象や new physics であれば 7 や 8 以上を要求することが多い。

たとえば、$N_{obs} = 88$, $\langle N_{BG} \rangle = 64$ ならば、$\frac{N_{ev}}{\sigma_{BG}} = \frac{88-64}{\sqrt{64}} = 3$ 故、3σ の有為さ、ということになる。

1.3 コメント

上記をよめばあきらかであるが、年間数個のイベントの観測を有為にするには、バックグラウンド数を 1 以下に小さくするしかないことがわかるであろう。1 イベントを 5σ でいうにはバックグラウンドの期待値は 6×10^{-7} 個以下である。

2　同時観測のバックグラウンド

2 つ以上の検出器の出力のバックグラウンドは時間的に無相関であるとする。しかし、偶然、他の検出器と同時[8]にバックグラウンドが発生し得る。このようなものを、Accidental Coincidence と呼ぶ。

2 台の場合を考えよう。

- 検出器 A のバックグラウンド頻度は f_A [個/sec] である。
- 検出器 B のバックグラウンド頻度は f_B [個/sec] である。
- $f_{A,B} \ll 1$ [個/sec] とする。
- A,B の 2 つのイベントが Δt [sec] 以内にあるとき、この 2 つのイベントは同時イベントとする。

Accidental Coincidence の頻度は、検出器 A の" 窓" がバックグラウンドにより $f_A \cdot \Delta t$ [sec] 開いている間に、B が偶然バックグラウンドを出す確率であるから、

$$f_A \cdot f_B \cdot \Delta t$$

である。2 つの検出器が同じ頻度であれば、

$$f^2 \Delta t$$

で与えられる。これに総観測時間 T [sec] をかけたものが同時観測で期待されるバックグラウンド数 $\langle N_{BG} \rangle$ である。

TAMA などの解析で、典型的な時間ウインドウ ΔT は 1msec 程度である。1 年間 ($\sim 3 \times 10^7$[sec]) の観測で $\langle N_{BG} \rangle < 3 \times 10^{-3}$ 個におさえるとすると、

$$f^2 \times 1 \times 10^{-3} \times 3 \times 10^7 \ < \ 3 \times 10^{-3}$$

となる。1 年間に 1 イベントを有為に観測するための $\langle N_{BG} \rangle$, f の値について表に示す。

コメント　TAMA DT6 の解析で、1000 時間 (=3.6×10^6[sec]) の解析で 1 イベント程度の閾値を設定したとする。これは頻度にして 3×10^{-7} 程度だから、2 台の検出器があれば、この閾値で上記を満たすような解析が可能である。

もちろん前提として、非ガウス雑音などすべてが独立であるとしている。

[8]許容する時間ウインドウ内に、という意味。

Table 5: ２台同時観測での、年間１イベント検出に対するバックグラウンドの要求

有為さ	許容バックグラウンド数 [個/年]	１台の許容頻度 [個/sec]
3σ	2.7×10^{-3}	3.0×10^{-4}
4σ	6.3×10^{-5}	4.6×10^{-5}
5σ	5.7×10^{-7}	4.4×10^{-6}

References

[1] Particle Data Group, "PARTICLES AND FIELDS" 30.Probability 31 Statistics, Phys.Rev.D Vol.66, 010001-225